



Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mentorierte Arbeit in Fachwissenschaftlicher Vertiefung mit
pädagogischem Fokus in Mathematik

Die Bieri-Neumann-Strebel Invariante in der geometrischen Gruppentheorie

Samuel Bieri^a

Inhalt

In dieser Arbeit werden einige zentrale Konzepte und Resultate der Bieri-Neumann-Strebel Theorie für diskrete Gruppen diskutiert und, soweit möglich, an einfachen Beispielen und Anwendungen erläutert. Grundlegende Definitionen und Sätze der Gruppentheorie, die dazu nötig sind, werden eingeführt, wie z.B. freie Gruppen und Cayley Graphen. Schlussendlich werden die Charaktersphäre $S(G)$ sowie eine Teilmenge davon, die geometrische Invariante $\Sigma^1(G)$, diskutiert.

Zielpublikum

Das Material ist weitgehend in sich abgeschlossen und sollte daher einem recht breiten Publikum von Mathematikern und mathematisch interessierten Physikern zugänglich sein. Insbesondere ist der Stoff geeignet für einen Weiterbildungskurs für gymnasiale Lehrpersonen im Fach Mathematik.

Voraussetzungen

Konzepte, Schreibweisen und Konventionen der Mengenlehre und der Gruppentheorie, wie sie in Grundlagenvorlesungen zu diesen Themen im Mathematikstudium behandelt werden.

Form

Lesetext mit Beispielen und Illustrationen.

Betreuung

Prof. Dr. Norbert Hungerbühler

Datum

24. Juni 2018

^asamuel.bieri@alumni.epfl.ch

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
Danksagung	5
1 Grundlagen	6
1.1 Grundlegendes zu Gruppen	6
1.2 Freie Gruppen und Graphen	7
1.3 Konstruktion der freien Gruppe	12
1.4 Normalteiler, Faktorgruppe, Homomorphismus	13
1.5 Kommutatorgruppe und Abelsierung	14
2 Elemente der BNS Theorie	16
2.1 Cayley Graph	16
2.2 Charaktersphäre	18
2.3 Sigma-Invariante	19
2.4 Sigma-Kriterien	22
2.5 Anwendungen	26
Literatur	31

Einleitung

Die Bieri-Neumann-Strebel (BNS) Invarianten für diskrete Gruppen wurden erstmals in [BS80; BNS87; BR88] eingeführt und untersucht. Seither hat dieses Teilgebiet der geometrischen Gruppentheorie in verschiedenen anderen Gebieten der Mathematik Anwendungen gefunden. Als modernes Beispiel in der aktuellen Forschung kann die sogenannten *tropischen Geometrie* angeführt werden [BG84; MS15].

Diskrete Gruppen sind fundamentale Bausteine für verschiedenste Bereiche der modernen Mathematik und der theoretischen Physik. Im Allgemeinen sind diskrete Gruppen aber sehr komplexe Objekte, welche schwierig zu charakterisieren sind. Der Fall von *endlichen (einfachen) Gruppen* ist gut verstanden: Hier gelang es in den letzten Jahrzehnten und unter Mitwirkung von Dutzenden von Mathematikern, eine vollständige Klassifizierung auszuarbeiten. Dadurch ist auch sehr viel über alle endlichen Gruppen bekannt.

Über *unendliche (diskrete) Gruppen* weiss man noch deutlich weniger als über endliche Gruppen. Es gibt aber verschiedene Ansätze, wie man solche Gruppen charakterisieren kann. In dieser Arbeit wollen wir einige *geometrische Methoden* vorstellen, mit denen diskrete Gruppen untersucht werden können. In der geometrischen Gruppentheorie ist der *Cayley Graph* das zentrale Objekt. In Kapitel 2 werden wir aber sehen, dass der Cayley Graph von einer arbiträren Wahl der Erzeugermenge abhängt. Er stellt somit keine intrinsische Eigenschaft der Gruppe dar. Man kommt sodann zur Einsicht, dass nicht der Cayley Graph selber, sondern lediglich gewisse (geometrische) *Invarianten* dieses Graphen die zu Grunde liegende Gruppe charakterisieren können.

Ein Hauptziel dieser Arbeit ist es, die Invariante Σ^1 der BNS Theorie als interessantes und einflussreiches Beispiel einer Invarianten des Cayley Graphen einzuführen und zu erläutern. Dies wird später im Kapitel 2 geschehen. Σ^1 kann auf mehrere unterschiedliche Weisen definiert werden, und wir wählen hier die elementarste daraus. Der Index in Σ^1 bedeutet, dass höherdimensionale Verallgemeinerungen der Invarianten eingeführt und untersucht wurden [Ren88]. Einige geschichtliche Entwicklungen sind auch in Ref. [Str13] beschrieben. Der Einfachheit halber bezeichnen wir in dieser Arbeit die Invariante Σ ohne Index, so wie sie ursprünglich eingeführt und genannt wurde.

Diese Arbeit ist folgendermassen aufgebaut. Im Kapitel 1.1 führen wir grundlegende Begriffe der Gruppentheorie ein: Gruppen und Untergruppen, Erzeugermengen, Basen etc, und diskutieren einige Beispiele dazu. Freie Gruppen sind zentrale Bausteine der diskreten Gruppentheorie. In Kapitel 1.2 führen wir freie Gruppen ein, zusammen mit Begriffen der Graphentheorie, welche sich später als hilfreich erweisen werden. Die freie Gruppe wird in Kapitel 1.3 explizit als Homotopiegruppe eines Graphen konstruiert. In Kapitel 1.4 folgen weitere Konzepte wie Normalteiler, Faktorgruppen, Homomorphismus etc, und einige wichtige Sätze dazu werden bewiesen. Im letzten Kapitel 1.5 der Einführung besprechen wir die Abelsierung einer Gruppe und stellen den Klassifikationssatz für abelsche Gruppen vor (ohne Beweis). Mit diesem Rüstzeug können wir uns dem eigentlichen Thema, der geometrischen Gruppentheorie und der BNS Invarianten Σ , in Kapitel 2 zuwenden.

Kapitel 2.1 startet mit dem Cayley Graphen, einer geometrischen Darstellung diskreter Gruppen, und gibt einige Beispiele dazu. Als nächstes, in Kapitel 2.2, betrachten wir Homomorphismen, welche die Gruppenelemente auf die reelle Achse abbilden. Diese sogenannten *Charakter* lassen sich auf den Cayley Graphen erweitern, und wir zeigen, dass sie als Punkte einer Sphäre (der sog. *Charaktersphäre*) verstanden werden können. In Kapitel 2.3 führen wir die Σ -Invariante als offene Teilmenge der Charaktersphäre ein und in 2.4 beweisen wir Kriterien, die es erlauben zu entscheiden, ob ein Charakter zu Σ gehört oder nicht. Schliesslich präsentieren wir Anwendungen der BNS Theorie als Theoreme in Kapitel 2.5 (ohne Beweise). Diese Anwendungen und drei abschliessende Korollare sollen aufzeigen, wie die BNS Theorie helfen kann, abstrakte algebraische Eigenschaften diskreter Gruppen geometrisch zu formulieren. Beispielsweise gibt die Theorie überraschend allgemeine Einblicke in die *endliche Präsentierbarkeit* solcher Gruppen.

Danksagung

Ganz herzlich möchte ich Prof. Dr. Robert Bieri danken, für seine Bereitschaft, mich mit viel Geduld und mit Informationen aus erster Hand in dieses reichhaltige und spannende Gebiet der Mathematik einzuführen. Weiter möchte ich Prof. Dr. Hungerbühler danken für seine Anregungen und seine hilfreichen Rückmeldungen. Vielen Dank geht auch an Franz Bieri für ein detailliertes Korrekturlesen.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundlegendes zu Gruppen

In dieser Arbeit werden beim Leser lediglich einige grundlegende Konzepte der Mengenlehre und der Gruppentheorie vorausgesetzt. In diesem ersten Kapitel wollen wir die notwendigen Definitionen zu Gruppen in Erinnerung rufen und festlegen.

(Gruppe) Eine diskrete Gruppe (G, \cdot) ist eine endliche oder abzählbar unendliche Menge G , welche eine assoziative binäre Verknüpfung (das Produkt „ \cdot “), sowie ein neutrales Element und Inverse besitzt. Genauer fordern wir für das Produkt $\cdot : G \times G \rightarrow G$ folgende Axiome:

- **Assoziativität:** $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$.
- **Neutrales Element:** Es gibt ein Element $1 \in G$ mit $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$, $\forall g \in G$.
- **Inverse:** Zu jedem $g \in G$ gibt es ein Inverses $g^{-1} \in G$ mit $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$.

Zur Vereinfachung der Notation lassen wir das Verknüpfungszeichen oftmals aus, d.h. wir schreiben $g \cdot g' = gg'$ oder G für die Gruppe. Die *Ordnung* der Gruppe ist die Anzahl Elemente in G (Kardinalität $|G|$).

Bemerkung. Es folgt einfach aus den Gruppenaxiomen, dass es genau ein neutrales Element gibt und dass jedes $g \in G$ ein eindeutiges Inverses g^{-1} hat.

(Abelsche Gruppe) Eine Gruppe nennt man *abelsch* oder *kommutativ*, falls alle Elemente miteinander vertauschen, d.h. wenn $g_1g_2 = g_2g_1$, $\forall g_1, g_2 \in G$. Für abelsche Gruppen bezeichnet man die Verknüpfung gewöhnlich mit „+“, das neutrale Element mit „0“ und das Inverse von g mit $-g$. Allgemein wird das neutrale Element manchmal auch „ e “ geschrieben.

(Untergruppe) Eine Untergruppe U ist eine Teilmenge von G , welche unter dem Produkt *abgeschlossen* ist, d.h. $u \cdot v, u^{-1} \in U$, $\forall u, v \in U$. Für Untergruppen von G benutzt man oft die Notation $U \leq G$. Eine Gruppe hat immer die triviale Gruppe $\{1\}$ und sich selber als Untergruppe. Aber es gibt natürlich auch interessantere Untergruppen.

(Erzeugermenge) Sei X eine Teilmenge von G , und X^{-1} die Menge der Inversen. Betrachten wir $Y = X \cup X^{-1}$. Die Menge der Produkte aus Y ist eine Untergruppe von G , da sie abgeschlossen ist. Diese Untergruppe schreibt man als $\text{gp}(X)$ [auch $\langle X \rangle$]:

$$\text{gp}(X) = \{y_1y_2 \cdots y_k \mid y_1, y_2, \dots, y_k \in X \cup X^{-1}, k \in \mathbb{N}\} \leq G. \quad (1.1)$$

Falls $\text{gp}(X)$ die ganze Gruppe G ergibt, d.h. ist $\text{gp}(X) = G$, so heisst X *erzeugend* oder *Erzeugermenge von G* . Mit anderen Worten: Wenn jedes Element von G durch ein Produkt aus X dargestellt werden kann, so sagt man, dass die Gruppe G durch $X \subset G$ erzeugt wird. Wenn G eine endliche Erzeugermenge hat, so nennt man die Gruppe *endlich erzeugt*. In dieser Arbeit gehen wir immer von endlich erzeugten Gruppen G aus.

Bemerkung. Jede Gruppe (ausser der trivialen $\{1\}$) hat viele Erzeugermengen. Anhand von Beispielen sieht man leicht, dass es im Allgemeinen selbst dann eine Vielzahl von Möglichkeiten gibt, wenn wir uns auf minimale (d.h. kleinstmögliche) Erzeugermengen beschränken.

Eine Gruppe $G = \text{gp}(B)$ nennt man *frei über B* , wenn jedes Element von G auf *eindeutige Weise* durch ein Produkt von Erzeugern in B dargestellt werden kann. In diesem Fall wird B eine *Basis* von G genannt, was dieses Konzept der linearen Algebra auf Gruppen verallgemeinert. Wegen deren grosser Bedeutung werden wir freie Gruppen und Basen im nächsten Kapitel noch näher betrachten. Hierzu aber erst einmal einige Beispiele.

Beispiel 1.1. Ein einfaches Beispiel ist die *zyklische Gruppe* $(\mathbb{Z}_n, +)$. Es ist die additive Gruppe der ganzen Zahlen modulo n , d.h. $j + n \equiv j$. Diese Gruppe ist offensichtlich kommutativ und sie wird von $X = \{1\}$ erzeugt. Man könnte aber z.B. auch $X = \{2, 3\}$ als Erzeugermenge wählen. Die Gruppe ist wegen der zyklischen Relation allerdings nicht frei, da man jedes Element auf verschiedenste Arten darstellen kann: $a = a + n = a + 2n = \dots$

Beispiel 1.2. Die additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ wird von $\{1\}$ frei erzeugt: Jede ganze Zahl kann eindeutig dargestellt werden. Allgemein nennt man die Gitter $(\mathbb{Z}^n, +)$ *frei abelsche Gruppen* über der kanonischen Basis von \mathbb{Z}^n .

Beispiel 1.3 (Satz von Cayley). Die symmetrischen Gruppen S_n , d.h. die Permutationen von n Objekten, sind „universell“, im Sinne dass jede endliche Gruppe G isomorph ist zu einer Untergruppe von $S_{|G|}$.

Beispiel 1.4. In Geometrie und Physik sind Symmetriegruppen äusserst wichtig. Hier könnten wir die Symmetrien des Polygons mit n Ecken in der Ebene anführen: Die *Diedergruppe* D_n . Diese Gruppe enthält n Spiegelungen und n Rotationen, ihre Ordnung ist also $2n$. Die Gruppe wird von zwei Spiegelungen $\{s, s'\}$ erzeugt. Alternativ kann man als Erzeugermenge eine Spiegelung und eine Rotation $\{s, r\}$ wählen. Man überzeugt sich leicht, dass die Gruppe nicht abelsch ist. (Abb. 1.1)

1.2 Freie Gruppen und Graphen

In diesem Kapitel diskutieren wir freie Gruppen und führen einige grundlegende Begriffe der Graphentheorie ein. Im nächsten Kapitel werden wir die freie Gruppe dann explizit mit Hilfe von Graphen konstruieren.

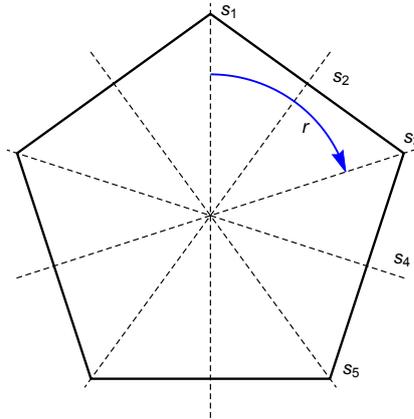


Abb. 1.1: Pentagon (n -gon mit $n = 5$) und dessen Symmetrien D_5 . Die 5 Spiegelungen an den gestrichelten Geraden sind s_1, \dots, s_5 . Die Rotationssymmetrien sind $r^n, n = 1, \dots, 5$.

(Basis) Spezielle Erzeugermengen B (mit $1 \notin B$) bezeichnet man als *Basis* der Gruppe G , wenn jedes Element $g \in G$ genau eine Darstellung als Produkt

$$g = y_1 y_2 \dots y_n, \quad y_k \in Y = B \cup B^{-1} \quad (1.2)$$

besitzt.

Die Formulierung „genau eine Darstellung“ ist etwas vage. Um dies zu präzisieren kommen wir nicht darum herum, den Begriff der *reduzierten Wörter* einzuführen. Ein *Wort* vom Alphabet $Y = B \cup B^{-1}$ ist eine Folge von Elementen aus der Menge Y . Nun sei das Alphabet gegeben durch die Gruppenelemente B und ihrer Inversen. Ein *reduziertes Wort* im Alphabet $B \cup B^{-1}$ ist ein Wort, in dem Inverse nicht nebeneinander stehen [d.h. Wörter $(\dots, b, b^{-1}, \dots)$ sind nicht reduziert]. Durch Multiplikation kann jedem solchen Wort ein Element in G zugeordnet werden, wie in Gl. (1.2) geschrieben. „Genau eine Darstellung“ bedeutet nun, dass es für jedes $g \in G$ *genau ein reduziertes Wort* in $B \cup B^{-1}$ gibt, aus dem g durch Multiplikation hervorgeht. Der springende Punkt ist hier, dass man Darstellungen von g , die durch triviales Einfügen von $1 = bb^{-1}$ in (1.2) erfolgen, nicht als neue Wörter betrachten will. Ein ähnliches Konzept einer Basis gibt es in der linearen Algebra, allerdings ist in diesem Fall die Verknüpfung abelsch.

(Freie Gruppe) Anders als in der linearen Algebra sind Gruppen, die eine Basis besitzen, sehr speziell – man nennt sie *freie Gruppen*. Die Anzahl Basiselemente $|B|$ einer freien Gruppe wird ihr *Rang* genannt. Da alle freien Gruppen mit Rang k isomorph sind, schreibt man dafür F_k .

Bemerkung. Zwischen Vektorräumen und freien Gruppen bestehen gewisse Analogien. Auch bei Vektorräumen spricht man von einer Basis $\{b_k\}$, wenn jeder Vektor v eindeutig als Linearkombination, $v = \sum_k v_k b_k$, dargestellt werden kann. Dies ist gleichbedeutend mit der Eindeutigkeit des Nullvektors: $\sum v_k b_k = 0 \Leftrightarrow v_k = 0$. Bei freien Gruppen ist die Situation etwas anders, da die Verknüpfung nicht abelsch ist und weil kein Zahlenkörper vorhanden ist. Allerdings kann man zeigen, dass die Eindeutigkeit

der Darstellung des Neutralelements auch hier eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Basis und die Freiheit der Gruppe ist: Nehmen wir an, 1 sei eindeutig durch das leere Wort in $B \cup B^{-1}$ dargestellt, d.h. es gibt kein anderes reduziertes Wort (y_k) mit $y_1 y_2 \dots y_n = 1$. Sei $g (\neq 1)$ ein Element mit zwei verschiedenen Darstellungen: $g = x_1 \dots x_n = y_1 \dots y_m$. Nun können wir das Neutralelement durch Multiplikation mit Inversen erhalten: $1 = x_1 \dots x_n y_m^{-1} \dots y_1^{-1}$. Da die Darstellungen verschieden sind ($x_n \neq y_m$, etc), können wir dieses Wort nicht reduzieren, was in Widerspruch zur Annahme ist. Also ist die Freiheit der Gruppe bereits durch die Eindeutigkeit des Neutralelements gegeben.

(Graph) Ein gerichteter Graph

$$\Gamma = (V, K, \alpha, \beta) \quad (1.3)$$

besteht aus einer Menge von Knoten V , einer Menge von Kanten K , sowie den Abbildungen

$$\alpha, \beta : K \rightarrow V, \quad (1.4)$$

welche jeder Kante einen Anfangs- bzw. Endknoten zuordnen. Wenn V abzählbar ist und in jedem Knoten endlich viele Kanten starten und enden, so kann man Γ auch als Unterraum von \mathbb{R}^3 realisieren. Bildlich können wir Knoten als geometrische Punkte im Raum zeichnen, welche durch Kanten als Linien verbunden sind. Einfache Beispiele sind in Abb. 1.2 gezeigt. Die Richtung einer Kante kann als Pfeil über der Linie vom Anfangs- zum Endknoten gezeichnet werden. Für *Kantenschlaufen* [d.h. mit $\alpha(k) = \beta(k)$] müssen wir deren Richtung zusätzlich festlegen.

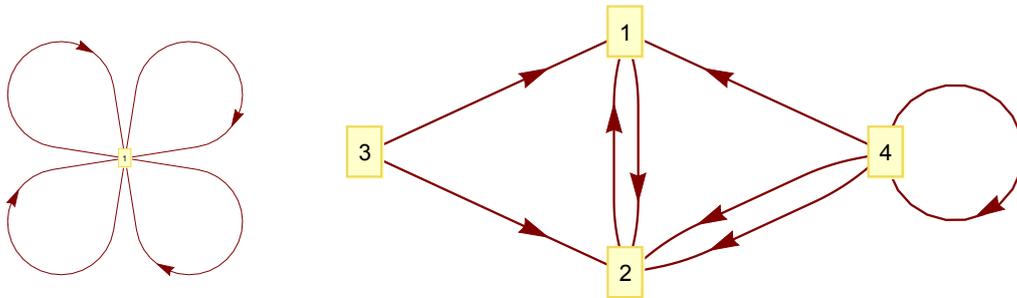


Abb. 1.2: Gerichtete Graphen. Links: *Rose mit vier Blättern* (zusammenhängender Graph aus vier Kantenschlaufen).

(Kantenweg) Um Kantenwege auf einem Graphen zu bilden, müssen zuerst *inverse Kanten* eingeführt werden:

$$K^{-1} = \{k^{-1} \mid k \in K\} \quad (1.5)$$

mit $K \cap K^{-1} = \emptyset$ und $\alpha(k^{-1}) = \beta(k)$, $\beta(k^{-1}) = \alpha(k)$. Die inversen Kanten sind also die Kanten des Graphen mit entgegengesetzter Richtung. Von nun an verwenden wir „Kante“ für alle Elemente von $K \cup K^{-1}$. Ein *Kantenweg* w ist eine Folge von Kanten

$$w = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad k_j \in K \cup K^{-1} \quad (1.6)$$

mit $\alpha(k_{j+1}) = \beta(k_j)$ für alle $1 \leq j < n$. Hier ist $l(w) := n$ die *Länge* von w . Die Menge der Kantenwege eines Graphen Γ schreiben wir $W(\Gamma)$. $K \cup K^{-1}$ sind die Kantenwege der Länge 1. Die Abbildungen α und β auf Anfangs- bzw. Endknoten von Kanten erweitern sich auf Kantenwege,

$$\alpha, \beta : W(\Gamma) \rightarrow V. \quad (1.7)$$

Der Vollständigkeit halber soll $W(\Gamma)$ für jeden Knoten $v \in V$ einen Kantenweg der Länge 0 enthalten: $1_v \in W(\Gamma)$ mit $\alpha(1_v) = \beta(1_v) = v$, $1_v^{-1} = 1_v$ und $l(1_v) = 0$.

Kantenwege mit $\alpha(w) = \beta(w)$ nennt man *geschlossen*. Graphen, bei denen jedes Paar von Knoten durch einen Kantenweg verbindbar ist, nennt man *zusammenhängend*. In der Folge gehen wir von zusammenhängenden Graphen aus.

(Baum) *Bäume* sind zusammenhängende Graphen, die keine geschlossenen Kantenwege besitzen. Ein Beispiel für einen Baum ist in Abb. 1.3a gegeben.

(Maximaler Baum, Sehnanzahl) Ein Graph Γ besitzt einen *maximalen Baum* Γ_0 als Untergraph. Γ_0 ist definiert als der grösste Untergraph von Γ , welcher keine geschlossenen Kantenwege besitzt. Die Anzahl Kanten von Γ , die in Γ_0 fehlen, d.h. $|K \setminus K_0|$, nennt man die *Sehnanzahl*. Typischerweise hat ein Graph viele maximale Bäume. Man kann aber zeigen, dass die Sehnanzahl nicht von dieser Wahl abhängt und eine intrinsische Charakteristik des Graphen darstellt (ohne Beweis).

(k-blättrige Rose) Eine *Rose* ist ein Graph, der aus einem einzigen Knoten besteht. Die Anzahl Blätter einer Rose sind die Anzahl Kanten $|K|$ (siehe Abb. 1.3b für eine 3-blättrige Rose).

(Kantenwegprodukt) Wir können nun auf natürliche Weise ein *partielles Produkt* in $W(\Gamma)$ als Zusammensetzen von Kantenwegen definieren. Die Kantenwege w_1 und w_2 kann man, für $\alpha(w_2) = \beta(w_1)$, zum Kantenweg $w_1 w_2 \in W(\Gamma)$ zusammensetzen.

Beobachtung. Jeder Kantenweg ist das Produkt seiner Kanten. Das Kantenwegprodukt ist – soweit definiert – assoziativ: $(w_1 w_2) w_3 = w_1 (w_2 w_3)$, und die Elemente 1_v sind neutral: $1_{\alpha(w)} \cdot w = w \cdot 1_{\beta(w)} = w$.

(Inverser Kantenweg) Als nächstes definieren wir den *inversen Kantenweg*. Das Inverse von w in Gl. (1.6) ist der Kantenweg

$$w^{-1} = (k_n^{-1}, \dots, k_2^{-1}, k_1^{-1}), \quad (1.8)$$

d.h. es ist w in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Hier beobachten wir, dass das Produkt $w \cdot w^{-1}$ nicht etwa das oben definierte neutrale Element ergibt. Vielmehr handelt es sich um einen geschlossenen Kantenweg, der sich selber zurückverfolgt.

(Reduzierte Kantenwege) Um uns einer Gruppenstruktur anzunähern, führen wir als nächstes die Menge der *reduzierten Kantenwege* $W^{\text{red}} \subset W$ ein. Ein *Stachel* in einem Kantenweg ist ein Teilstück $(\dots, k, k^{-1}, \dots)$, welches die gleiche Kante k unmittelbar nacheinander in entgegengesetzten Richtungen durchläuft. Ein *reduzierter Kantenweg* ist ein Kantenweg, der keine Stacheln aufweist.

Sei $w = (\dots, k_i, k, k^{-1}, k_j, \dots)$ ein Kantenweg mit Stachel. Da $\beta(k_i) = \alpha(k_j)$, erhalten wir durch Weglassen des Stachels einen neuen Kantenweg $\tilde{w} = (\dots, k_i, k_j, \dots)$. Offensichtlich führt das sukzessive Weglassen von Stacheln zu einem eindeutig bestimmten Kantenweg $w_{\text{red}} \in W^{\text{red}}$.

Nun wollen wir das Kantenwegprodukt in W^{red} definieren. Da durch zusammensetzen von $w_1, w_2 \in W^{\text{red}}$ Stacheln entstehen können, ist $w_1 \cdot w_2$ im Allgemeinen kein reduzierter Kantenweg. Wir definieren das Produkt reduzierter Kantenwege als $w_1 \cdot_{\text{red}} w_2 = (w_1 \cdot w_2)_{\text{red}}$, d.h. der zusammengesetzte Kantenweg wird danach reduziert. Da der so erhaltene Kantenweg eindeutig ist, ist auch das Kantenwegprodukt in W^{red} wohldefiniert. Man beobachte leicht, dass $(w \cdot w^{-1})_{\text{red}} = 1_{\alpha(w)}$ und $(w^{-1} \cdot w)_{\text{red}} = 1_{\beta(w)}$. Das Produkt in W^{red} ist offensichtlich assoziativ, da es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Stacheln weggelassen werden.

Bemerkung. Anstatt das reduzierte Kantenwegprodukt einzuführen, werden üblicherweise Äquivalenzklassen $[w]$ durch Hinzufügen und Weglassen von Stacheln definiert. Diese Komplikation ist aber für unseren Zweck nicht notwendig.

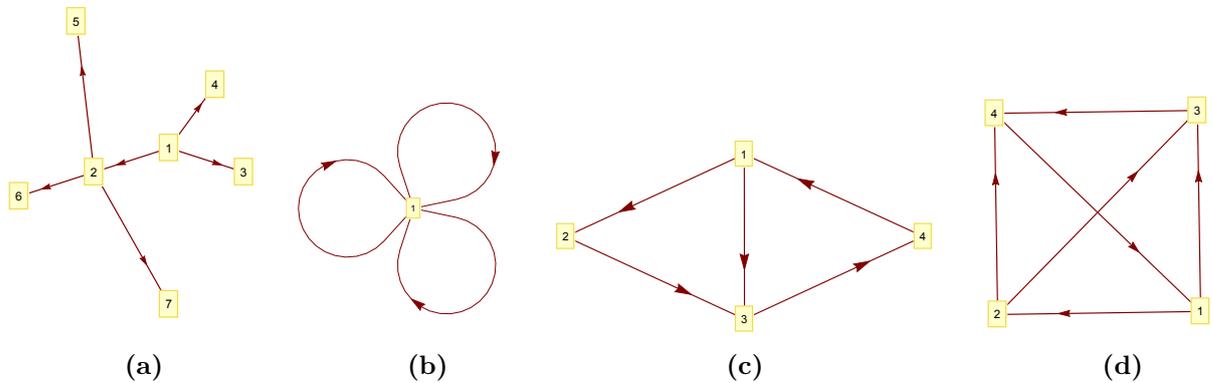


Abb. 1.3: (a) Baum; (b) 3-blättrige Rose; (c) Graph mit Sehnenzahl 2; (d) Graph mit Sehnenzahl 3.

1.3 Konstruktion der freien Gruppe

Wie oben besprochen, ist das Kantenwegprodukt nur für Kantenwege mit kompatiblen Anfangs- und Endknoten definiert. Um eine Gruppenstruktur zu erhalten, beschränken wir uns jetzt auf geschlossene Kantenwege. Die Menge

$$\pi_1(\Gamma, v) = \{w \in W^{\text{red}}(\Gamma) \mid \alpha(w) = \beta(w) = v\} \quad (1.9)$$

bildet bezüglich dem reduzierten Kantenwegprodukt eine Gruppe. Damit drängen sich nun interessante Fragen auf: Was ist die Gruppe $\pi_1(\Gamma, v)$ und wie wird sie charakterisiert? Wie hängt diese Gruppe mit dem Graphen Γ zusammen?

Satz 1.1. $\pi_1(\Gamma, v) \cong F_n$, wobei n die Sehnanzahl von Γ ist.

Beweis. Wir wollen den Beweis im Fall von Graphen mit endlicher Anzahl Knoten und Kanten besprechen. Der unendliche Fall ist nicht weiter schwierig. Besprechen wir zuerst zwei Spezialfälle.

Sei Γ ein Baum, wie z.B. in Abb. 1.3a. Geschlossene Kantenwege im Baum bestehen nur aus Stacheln, und diese reduzieren sich auf das Neutralelement 1_v . Somit ist $\pi_1(\Gamma, v)$ die triviale Gruppe. Auch die Sehnanzahl verschwindet, da Γ und sein maximaler Baum identisch sind.

Betrachten wir als nächstes die n -blättrige Rose, wie in Abb. 1.3b für $n = 3$ gezeigt. Bezeichnen wir die Kanten des Graphen mit $K = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$. Jeder geschlossene Kantenweg kann als Produkt dieser Kanten und ihrer Inversen geschrieben werden, K ist somit eine Erzeugermenge von $\pi_1(\Gamma, v)$. Nach Reduktion von Stacheln ist diese Darstellung auch eindeutig und die Gruppe frei, da reduzierte Kantenwege eindeutig als reduzierte Wörter im Alphabet $K \cup K^{-1}$ geschrieben werden. Der Rang der freien Gruppe ist also $n = |K|$. Der maximale Baum der Rose ist leer, somit ist ihre Sehnanzahl auch $|K|$.

In Fall eines allgemeinen Graphen Γ , wie in Abb. 1.3c oder 1.3d, wählen wir als erstes einen maximalen Baum von Γ . Geschlossene Kantenwege, die diesem Baum folgen, reduzieren sich auf das Neutralelement. Wollen wir nichttriviale Kantenwege konstruieren, so müssen diese Sehnen enthalten. Geschlossene Kantenwege, die *genau eine Sehne* enthalten, sind durch den gewählten Baum eindeutig bestimmt, wir nennen sie $S \subset \pi_1(\Gamma, v)$. Die Kantenwege S bilden eine Erzeugermenge der Gruppe, da jedes Element als Produkt dargestellt werden kann. Diese Darstellung ist auch eindeutig, da es (ausser dem trivialen) offensichtlich kein Produkt aus $S \cup S^{-1}$ gibt, welches das Neutralelement 1_v darstellt. \square

Ein anderer Beweis von Satz 1.1 benutzt die Homotopie: Durch Zusammenziehen vom maximalen Baum erhält man eine n -blättrige Rose, wobei n die Sehnanzahl des Graphen ist.

1.4 Normalteiler, Faktorgruppe, Homomorphismus

(Normalteiler) Ein weiterer wichtiger Begriff der *Normalteilers* einer Gruppe. Ein Normalteiler N ist eine Untergruppe von G , welche *invariant unter Konjugation* mit Elementen von G ist. Konjugation nennt man die Operation

$${}^g a = gag^{-1} \quad (1.10)$$

der Gruppe auf sich selber. Das heisst, eine Untergruppe $N \leq G$ ist ein Normalteiler von G genau dann, wenn ${}^g n \in N$, $\forall g \in G$ und $\forall n \in N$. In diesem Fall schreibt man

$$N \trianglelefteq G. \quad (1.11)$$

Man bemerke, dass jede Untergruppe einer abelschen Gruppe ein Normalteiler ist.

(Faktorgruppe) Wenn N ein Normalteiler von (G, \cdot) ist, so trägt die Menge der Nebenklassen

$$G/N := \{gN \mid g \in G\} \quad (1.12)$$

eine natürliche Gruppenstruktur: $(g_1N) * (g_2N) = (g_1 \cdot g_2)N$. Dass dieses Produkt wohldefiniert ist und allen Gruppenaxiomen genügt, ist einfach zu zeigen: Die Gruppenaxiome folgen trivialerweise aus denjenigen von G : Neutralelement ist N und das Inverse von gN ist $g^{-1}N$. Es bleibt zu zeigen, dass das Produkt *wohldefiniert*, also existent und eindeutig ist. Offensichtlich existiert es, da $(g_1g_2)N \in G/N$. Für die Eindeutigkeit brauchen wir nun die Normalität von N . Wählen wir zwei Darstellungen der Elemente: $g_1 \neq \tilde{g}_1 = g_1n$, sowie $g_2 \neq \tilde{g}_2 = g_2m$ mit $n, m \in N$. Dann haben wir $(g_1N)(g_2N) = (g_1g_2)N$ und $(\tilde{g}_1N)(\tilde{g}_2N) = (\tilde{g}_1\tilde{g}_2)N$. Wegen $N \trianglelefteq G$ ist $\tilde{g}_1\tilde{g}_2 = g_1ng_2m = g_1g_2\tilde{n}m$ mit $\tilde{n} = g_2^{-1}mg_2 \in N$. Da $N \leq G$ abgeschlossen, haben wir $\tilde{n}mN = N$, und somit ist $(g_1g_2)N = (\tilde{g}_1\tilde{g}_2)N$. \square

$(G/N, *)$ nennt man *Quotienten-* oder *Faktorgruppe* von G bezüglich N .

(Homomorphismus) Ein *Gruppenhomomorphismus* $f \in \text{Hom}(G, H)$ ist eine Abbildung $f : G \rightarrow H$ von der Gruppe (G, \cdot) in die Gruppe $(H, *)$, wobei die Gruppenstruktur respektiert wird:

$$f(x \cdot y) = f(x) * f(y), \quad \forall x, y \in G. \quad (1.13)$$

Ist f auch noch bijektiv, so ist es ein Isomorphismus und wir schreiben $G \cong H$. Der Kern von f , $\ker(f) := \{k \in G \mid f(k) = 1_H\}$, ist ein Normalteiler von G . *Beweis:* $f({}^g k) = f(g)f(k)f(g)^{-1} = f(g)f(k)f(g)^{-1} = 1$, $\forall g \in G$, $\forall k \in \ker(f)$. \square

Für die entsprechende Faktorgruppe gilt der

Satz 1.2 (Homomorphiesatz). Ist f ein Homomorphismus $f : G \rightarrow H$, so ist

$$G/\ker(f) \cong f(G) \leq H. \quad (1.14)$$

Beweis. Die Abbildung $g \cdot \ker(f) \mapsto f(g)$ ist offensichtlich surjektiv in (1.14). Betrachten wir zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$. Sind sie Elemente der gleichen Nebenklasse, so

werden sie auf das gleiche Element in H abgebildet, da $g_1 = g_2k$ mit $k \in \ker(f)$ und somit $f(g_1) = f(g_2)$. Gehören sie zu verschiedenen Nebenklassen, so ist $g_1 = g_2g$ mit $f(g) \neq 1$ und somit $f(g_1) \neq f(g_2)$. Die Abbildung ist also auch injektiv. \square

Bemerkung: Satz 1.2 sagt im Speziellen „ $\ker(f) = \{1\} \Leftrightarrow f$ bijektiv“. In vorhergehenden Kapiteln wurde die freie Gruppe eingeführt und konstruiert. Die grosse Bedeutung der freien Gruppe liegt nun insbesondere in folgendem

Satz 1.3. Jede Gruppe $G = \text{gp}(X)$ erzeugt durch $|X|$ Elemente ist isomorph zu einer Faktorgruppe der freien Gruppe $F_{|X|}$ vom Rang $|X|$.

Beweis. Sei B Basis der freien Gruppe $F_{|X|}$ mit $|B| = |X|$ und $f : B \rightarrow G$ gegeben durch eine Bijektion $B \rightarrow X$. Wie in der linearen Algebra kann man, wegen der Eindeutigkeit der Produktdarstellung der Elemente $w \in F_{|X|}$, f zu einem Homomorphismus $f : F_{|X|} \rightarrow G$ fortsetzen. Weil $f(B)$ die Erzeugermenge von G enthält, ist die Untergruppe $\text{gp}(f(B)) = G$, also ist f surjektiv. Aus dem Homomorphiesatz 1.2 folgt $F_{|X|}/\ker(f) \cong G$. \square

Beispiel 1.5. Die zyklische Gruppe kann als Quotientengruppe geschrieben werden:

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \quad (1.15)$$

Hier wird die Gruppe der ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +)$ in Äquivalenzklassen unterteilt, so dass $z \sim z + n$. Da $(\mathbb{Z}, +)$ abelsch ist, ist jede Untergruppe von \mathbb{Z} ein Normalteiler.

Bemerkung. Für endliche Gruppen ist die Ordnung der Faktorgruppe durch den Satz von Lagrange gegeben: $|G/N| = |G|/|N|$. Da \mathbb{Z} aber keine endliche Gruppe ist, ist der Satz von Lagrange hier nicht anwendbar.

Beispiel 1.6. Die Diedergruppe D_n besitzt einen Normalteiler erzeugt durch die Rotation r , denn die Untergruppe $\text{gp}(\{r\})$ ist ja abelsch. Weiter gilt in D_n die Relation $rs = sr^{-1}$, wobei s eine Spiegelung ist. Somit besteht diese Quotientengruppe lediglich aus den Klassen der *gleichsinnigen* und der *ungleichsinnigen* Symmetrien des n -gons. $D_n/\text{gp}(\{r\})$ ist also isomorph zu \mathbb{Z}_2 .

1.5 Kommutatorgruppe und Abelisierung

(Kommutator) Für jede Gruppe gibt es eine abgeleitete binäre Verknüpfung, nämlich der *Kommutator*:

$$[g_1, g_2] = g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}. \quad (1.16)$$

Gruppen, für welche alle Kommutatoren trivial sind (d.h. $[g_1, g_2] = 1, \forall g_1, g_2 \in G$), sind abelsch.

(Kommutatorgruppe) Eine wichtige Untergruppe von G ist die *Kommutatorgruppe*, genannt G' oder auch $[G, G]$. Sie wird durch die Menge der Kommutatoren erzeugt, das heisst

$$G' = \text{gp}(\{[g_1, g_2] \mid g_1, g_2 \in G\}). \quad (1.17)$$

Die Kommutatorgruppe ist sogar normal in G . Kommutatoren sind stabil unter Konjugation: ${}^g[g_1, g_2] = [{}^g g_1, {}^g g_2]$. Also ist $gG'g^{-1} = g(\text{gp}([g_1, g_2]))g^{-1} = \text{gp}([{}^g g_1, {}^g g_2]) = G'$ und G' ist ein Normalteiler von G .

Bemerkung. Selbst wenn die Gruppe G endlich erzeugt ist, so ist die Untergruppe G' im allgemeinen *nicht* endlich erzeugt [siehe Gl. (1.17)].

(Abelisierung) Da $G' \trianglelefteq G$, existiert die Faktorgruppe G/G' . Diese Faktorgruppe ist kommutativ und wird *Abelisierung* von G genannt.

Beweis. $[g_1G', g_2G'] = g_1G'g_2G'g_2^{-1}G'g_1^{-1}G' = [g_1, g_2]G' = G'$. Also ist G/G' abelsch. \square

Bemerkung. Allgemeiner lässt sich zeigen, dass „ G/N abelsch“ $\Leftrightarrow G' \leq N \trianglelefteq G$. Mit anderen Worten: Jeder Homomorphismus von G in eine abelsche Gruppe faktorisiert über $\pi : G \rightarrow G/G'$.

Für abelsche Gruppen gibt uns folgender Satz einen engen Rahmen vor:

Satz 1.4 (Klassifikationssatz). Endlich erzeugte abelsche Gruppen (wie beispielsweise eine Abelisierung G/G') sind gegeben durch

$$G/G' = \mathbb{Z}^k \oplus \bigoplus_j \mathbb{Z}_{\nu_j}. \quad (1.18)$$

Die Zahl $k \in \mathbb{N}$ wird \mathbb{Z} -Rang (oder *freier Rang*) der abelschen Gruppe genannt. Im endlichen Teil sind ν_j Potenzen von Primzahlen. (ohne Beweis)

Beispiel 1.7. Alle Untergruppen der zyklischen Gruppe sind Normalteiler (da \mathbb{Z}_n abelsch ist). \mathbb{Z}_9 hat beispielsweise die Untergruppe $B = \{0, 3, 6\}$. Die entsprechenden Nebenklassen sind $B, B+1, B+2$, und wir haben $\mathbb{Z}_9/B = \mathbb{Z}_3$.

Beispiel 1.8. Berechnen wir die Abelisierung der Diedergruppe $D_n = \text{gp}(\{r, s\})$, wobei r eine Rotation und s eine Spiegelung ist (siehe Abb. 1.1). Die Kommutatorgruppe wird erzeugt durch $[r, s] = r^2$. Für n ungerade haben wir somit $D'_n = \{1, r, \dots, r^{n-1}\}$ und die Nebenklassen sind $D_n/D'_n = \{1, s\} = \mathbb{Z}_2$. Für n gerade ist $D'_n = \{1, r^2, \dots, r^{n-2}\}$ und die Nebenklassen sind $D_n/D'_n = \{1, r, s, sr\}$. Diese Gruppe ist isomorph zur sogenannten *Kleinschen Vierergruppe* $K_4 = D_2 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (siehe Bsp. 2.1).

Beispiel 1.9 (Abelisierung der freien Gruppe). Betrachten wir nun die Abelisierung der freien Gruppe vom Rang zwei, $F_2 = \text{gp}(\{a, b\})$. Gemäss Kapitel 1.3 können wir dies als Fundamentalgruppe eines Graphen mit zwei elementaren geschlossenen Kantenwegen, z.B. Abb. 1.3c, auffassen. Die Kommutatorgruppe ist recht kompliziert, da sie aus unendlich vielen Kommutatoren erzeugt wird: $F'_2 = \text{gp}(\{[a, b], [a^2, b], [a, b^2], \dots\})$. In F_2/F'_2 werden Wörter aus F_2 nun zu Klassen zusammengefasst, bei denen die Reihenfolge der Buchstaben keine Rolle mehr spielt. Also können wir sie durch geordnete Elemente darstellen und finden $F_2/F'_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$. Ähnlich überzeugt man sich leicht, dass die Abelisierung der freien Gruppe vom Rang k die frei abelsche Gruppe \mathbb{Z}^k ergibt.

Kapitel 2

Elemente der BNS Theorie

2.1 Der Cayley Graph

Als nächstes wollen wir der Frage nachgehen, wie man diskrete Gruppen auf nützliche Weise darstellen und charakterisieren kann. Aus algebraischer Sicht kann man die paarweise Verknüpfung (Gruppenprodukt) einfach in einer Multiplikationstabelle angeben, der sogenannten *Gruppentafel*. Beispielsweise ist diese für die Kleinsche Vierergruppe in Tab. 2.1 gegeben.

(Cayley Graph) Eine graphische Darstellung der Gruppenstruktur ist der *Cayley Graph* $\Gamma(G, X)$ von G bezüglich ihrer Erzeugermenge X . Der Cayley Graph ist ein spezieller Graph $\Gamma = (V, K, \alpha, \beta)$, dessen Knoten durch die Gruppenelemente gegeben sind, $V = G$. Die Kanten des Graphen sind *gerichtet* und *gefärbt*: Eine Kante $(g; x)$ der Kantenmenge $K = G \times X$ startet beim Knoten g und führt zum Knoten $g \cdot x$, d.h. $\alpha(g; x) = g$ und $\beta(g; x) = gx$. Der Erzeuger $x \in X$ legt Richtung und Farbe der Kante fest. Die Anzahl Farben ist also gegeben durch $|X|$. Die *inverse Kante* zu $(g; x)$ ist $(g; x)^{-1} = (gx, x^{-1})$.

(Kantenweg) Um Kantenwege auf dem Cayley Graphen einzuführen, benötigen wir wiederum die inversen Erzeuger $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$. Seien $g, f \in G$ und $y_j \in Y = X \cup X^{-1}$, so bezeichnen wir einen *Kantenweg* von g nach $f = g \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$ mit

$$(g; y_1, y_2, \dots, y_n) \in W(\Gamma) = G \times Y \times \dots \times Y. \quad (2.1)$$

Die Multiplikation eines Kantenwegs $\omega = (g; y)$ mit einem Gruppenelement $h \in G$ ist wie folgt definiert: $h \cdot (g; y) = (hg; y)$.

Der Cayley Graph ist eine geometrische Darstellung der Gruppenstruktur. Er ist ein zentraler Baustein der *geometrische Gruppentheorie*. Allerdings wird der Graph bei grossen Gruppen schnell unübersichtlich, insbesondere ist er bei unendlichen Gruppen oft schwer zu analysieren. Hinzu kommt, dass der Cayley Graph abhängig von der Wahl der Erzeugermenge ist, d.h. die Graphen $\Gamma(G, X)$ und $\Gamma(G, X')$ sind im Allgemeinen nicht isomorph. Intrinsische Eigenschaften der Gruppe sollen aber unabhängig von der Erzeugermenge sein. Grössen aus Konstruktionen, die den Cayley Graphen $\Gamma(G, X)$ verwenden, aber unabhängig von der Erzeugermenge sind, bezeichnet man als *Invarianten der Gruppe*.

Eine bekannte Invariante ist die *Endenzahl* des Cayley Graphen. Andere algebraische Invarianten sind z.B. die Homologiegruppen $H_k(G)$. Die Σ -Invarianten der BNS

Theorie sind geometrische Invarianten (d.h. es sind geometrische Objekte). Als nächstes werden wir die einfachste daraus, die Invariante Σ^1 , genauer besprechen.

Die Multiplikation mit einem Element $t \in G$ operiert auf dem Cayley Graphen als farbrespektierender Automorphismus:

$$\begin{aligned} t \in G : \Gamma(G, X) &\rightarrow \Gamma(G, X) \\ (g; x) &\mapsto (tg; x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Man bemerke, dass diese Abbildung die Inzidenz von Knoten und Kanten respektiert.

Beispiel 2.1. Die kleinste nicht-zyklische Gruppe ist die *Kleinsche Vierergruppe*. Es ist eine abelsche Gruppe der Ordnung vier. Die Gruppentafel ist in Tab. 2.1 gegeben. Der Cayley Graph der Vierergruppe für die Erzeugermenge $X = \{2, 3\}$ wird in Abb. 2.1 gezeigt.

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

Tab. 2.1: Gruppentafel der Kleinschen Vierergruppe.

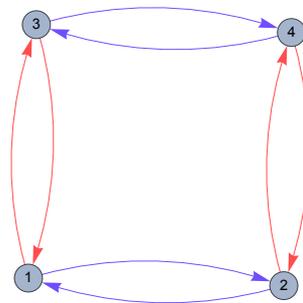


Abb. 2.1: Cayley Graph der Kleinschen Vierergruppe (Tab. 2.1) für die Erzeugermenge $X = \{2, 3\}$.

Beispiel 2.2. Ein weiteres einfaches Beispiel ist die freie Gruppe, für welche der Cayley Graph ein *Baum* ist (nicht so für frei abelsche Gruppen; siehe Abb 2.3).

Beispiel 2.3. Die Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks bilden die Diedergruppe D_3 (Abb. 2.2a). Als minimale Erzeugermenge können wir beispielsweise die Rotation r um 120° und eine Spiegelung s_1 wählen. So erhält man den Cayley Graphen in Abb. 2.2b. Wählt man hingegen zwei Spiegelungen $\{s_1, s_2\}$ als Erzeuger, so erhält man den Graphen in Abb. 2.2c.

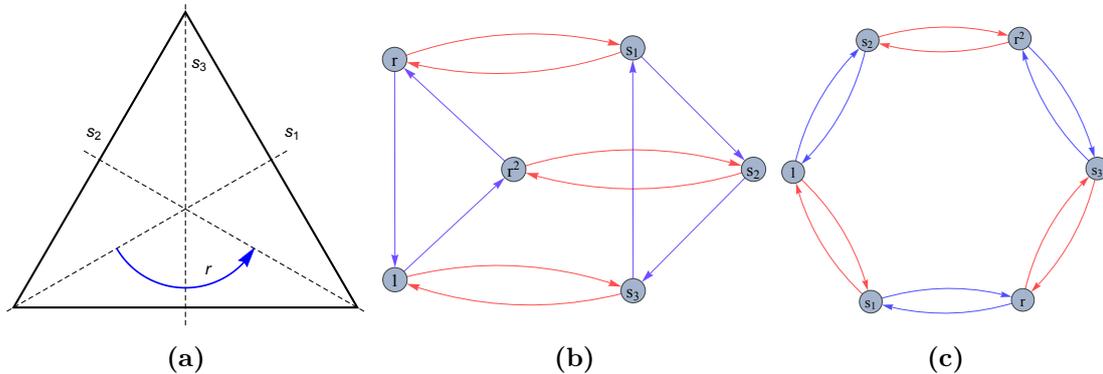


Abb. 2.2: (a) Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks; Cayley Graphen von D_3 für die Erzeugermenge $\{r, s_2\}$ in (b); und für $\{s_1, s_2\}$ in (c).

2.2 Die Charaktersphäre $S(G)$

Als nächstes betrachten wir Homomorphismen $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$, welche Elemente aus G in die additive Gruppe der reellen Zahlen abbilden,

$$\chi : G \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Einen solchen Homomorphismus χ nennen wir (additiver) *Charakter* der Gruppe.* χ hat eine natürliche Erweiterung auf den Cayley Graphen, nämlich die lineare Interpolation auf den Kanten. Wir nennen diese Erweiterung h_χ ,

$$h_\chi : \Gamma(G, X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

wobei $h_\chi|_G = \chi$.

Beobachtung. Die Gruppe G operiert auf dem Cayley Graphen Γ wie in (2.2), und auf $r \in \mathbb{R}$ durch Verschiebung [Addition von $\chi(t)$]: Für $t \in G$ ist $t \cdot r := \chi(t) + r$. Also ist $h_\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $h_\chi(tc) = t \cdot h_\chi(c) = \chi(t) + h_\chi(c)$.[†]

Proposition 2.1. Folgende Räume sind isomorph:

$$\text{Hom}(G, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(G/G', \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^k, \quad (2.5)$$

und k ist der \mathbb{Z} -Rang von G/G' .

Beweis. Offensichtlich ist die Restriktion von $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ auf die Kommutatorgruppe G' trivial, da $\chi([a, b]) = \chi(a) + \chi(b) - \chi(a) - \chi(b) = 0$. Folglich muss χ auf allen Elementen einer Nebenklasse gG' den gleichen Wert annehmen: $\chi(gG') =$

*Der Begriff *Charakter* wird je nach Kontext unterschiedlich verwendet. In der Darstellungstheorie beispielsweise bezeichnet man die Spur einer Matrixdarstellung als Charakter des Gruppenelements. Dieser Charakter ist im Allgemeinen weder additiv noch multiplikativ.

[†]Solche Abbildungen f mit $f(tc) = tf(c)$ und $t \in G$ nennt man „ G -Abbildungen“.

$\chi(g) + \chi(G') = \chi(g)$, was den ersten Isomorphismus zeigt. Um den zweiten Isomorphismus zu begründen, benutzen wir den Klassifikationsatz 1.4, Gl. (1.18). Auf dem endlichen Teil der Gruppe (\mathbb{Z}_ν) ist jeder Homomorphismus trivial, da $\chi(\nu) = \chi(\nu \times 1) = \nu\chi(1) = \chi(1) \Rightarrow \chi(1) = 0$. Für den nichtzyklischen Teil gibt es diesen Zwang nicht und deshalb ist $\chi(1) \in \mathbb{R}$ für jeden Faktor von \mathbb{Z} in G/G' frei wählbar. \square

(Charaktersphäre) Oft ist es sinnvoll, den trivialen Charakter $\chi(g) = 0, \forall g \in G$, aus $\text{Hom}(G, \mathbb{R})$ auszuschliessen. Weiter reicht es dann, die Klassen der Strahlen $[\chi]$ zu betrachten, d.h. $\chi_1 \sim \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1 = \lambda\chi_2$ mit $\lambda > 0$. Der Charakterraum der Strahlen hat so die Topologie einer Sphäre der Dimension $k - 1$. Dies wird die *Charaktersphäre* $S(G)$ genannt,

$$S(G) = \{[\chi] \mid \chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}\}. \quad (2.6)$$

Die Σ -Invariante der BNS Theorie ist eine Teilmenge von $S(G)$. Wir führen sie als nächstes ein.

2.3 Die Invariante $\Sigma(G)$

Betrachten wir nun gewisse Untergraphen des Cayley Graphen, $\Gamma_\chi^r \subseteq \Gamma(G, X)$. Wir definieren

$$\Gamma_\chi^r(G, X) = \{p \in \Gamma(G, X) \mid h_\chi(p) \geq r\}, \quad (2.7)$$

wobei r eine reelle Zahl ist und χ ein Charakter. Interessanterweise hängen gewisse Eigenschaften des Untergraphen Γ_χ^r weder von r noch von der gewählten Erzeugermenge X ab. Erstens gilt folgendes

Lemma 2.2. Die Aussage „ Γ_χ^r zusammenhängend“ hängt nicht von r ab.

„ Γ_χ^r zusammenhängend“ bedeutet: Für alle $p, q \in G_\chi^r = \{g \in G \mid \chi(g) \geq r\}$ gibt es einen Kantenzug $\omega = (p \rightarrow q; y_1, \dots, y_n)$ mit $\chi(py_1 \dots y_k) \geq r$ für $k = 1, \dots, n$. Anders ausgedrückt: $\exists \omega \in W(\Gamma)$ mit $v_\chi(\omega) := \min\{\chi(py_1 \dots y_k)\}_{k=1..n} \geq r, \forall p, q \in G_\chi^r$.

Beweis. Für $\chi = 0$ ist das Lemma trivial, da $\Gamma_{\chi=0}^{r \leq 0} = \Gamma$ und $\Gamma_{\chi=0}^{r > 0} = \emptyset$ (Der Cayley Graph als Ganzes ist natürlich zusammenhängend).

Sei $\chi \neq 0$ und betrachten wir $r \leq s$. Aus Def. (2.7) folgt $\Gamma_\chi^s \subseteq \Gamma_\chi^r$. Nehmen wir als erstes an, Γ_χ^s ist zusammenhängend. Sei $t \in G$ ein beliebiges Element mit $\chi(t) > 0$. Für zwei Knoten $p, q \in \Gamma_\chi^r$ wählen wir ein genügend grosses m , so dass

$$\begin{aligned} \chi(t^m p) &= m\chi(t) + \chi(p) \geq s, \\ \chi(t^m q) &= m\chi(t) + \chi(q) \geq s. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die Knoten $t^m p$ und $t^m q$ sind somit beide in Γ_χ^s und können darin durch einen Kantenzug ω verbunden werden (Γ_χ^s zush.). Also verbindet der Kantenzug $(p; t^m, \omega, t^{-m})$ die Knoten p und q in Γ_χ^r , und somit ist Γ_χ^r zusammenhängend.

Nehmen wir nun an, Γ_χ^r ist zusammenhängend. Für ein genügend grosses n haben wir $r + n\chi(t) \geq s$, und somit ist $t^n \Gamma_\chi^r = \Gamma_\chi^{r+n\chi(t)} \subseteq \Gamma_\chi^s$. Nun können wir das gleiche

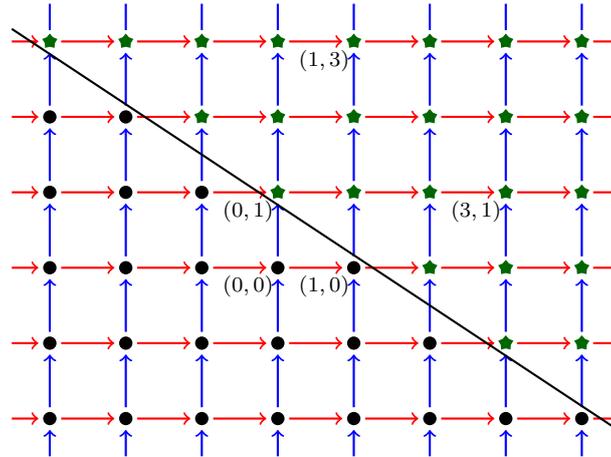


Abb. 2.3: Cayley Graph von \mathbb{Z}^2 für $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Die Knoten des Untergraphen Γ_χ^r für $\chi(a, b) = 2a + 3b$ und $r = 2.5$ sind als grüne Sterne markiert.

Argument wie oben verwenden, um zu zeigen, dass zwei Knoten in Γ_χ^s durch einen Kantenweg darin verbindbar sind. \square

Bemerkung. Wie besprochen folgt für $s \leq r$ aus der Definition $\Gamma_\chi^r \subseteq \Gamma_\chi^s$. Vergrößern wir den Wert von r , so kann der Untergraph $\Gamma_\chi^r \subset \Gamma$ also im Prinzip *kleiner* werden. Der Zusammenhang von Γ_χ^r (falls vorhanden) bleibt aber erhalten.

Beispiel 2.4. Der Cayley Graph Γ der additiven Gruppe \mathbb{Z}^2 für die Erzeugermenge $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ ist in Abb. 2.3 gegeben. Die Knoten des Untergraphen $\Gamma_\chi^r \subset \Gamma$ sind als grüne Sterne markiert. Hier haben wir $r = 2.5$ und als Charakter $\chi(a, b) = 2a + 3b$ gewählt. Der Untergraph $\Gamma_\chi^r \subset \Gamma$ ist offensichtlich zusammenhängend, und dies unabhängig vom Wert von r (Lemma 2.2).

Lemma 2.3. Die Aussage „ $\Gamma_\chi^r(G, X)$ zusammenhängend“ ist unabhängig von der Erzeugermenge X .

Beweis. Um von einer Erzeugermenge X zu einer anderen zu wechseln, reicht es, wenn wir in endlich vielen Schritten redundante Erzeuger zu X hinzufügen oder wegnehmen. Betrachten wir zuerst das Hinzufügen, $X' = X \cup \{x'\}$, wobei x' ein überflüssiger Erzeuger ist. Falls $\Gamma_\chi^r(G, X)$ zusammenhängend ist, so ist offensichtlich auch $\Gamma_\chi^r(G, X')$ zusammenhängend, da lediglich neue Kanten zum Graphen hinzugefügt werden [d.h. $\Gamma_\chi^r(G, X) \subseteq \Gamma_\chi^r(G, X')$].

Nehmen wie als nächstes an, $\Gamma_\chi^r(G, X')$ sei zusammenhängend. Sei ω ein Kantenweg in $\Gamma_\chi^r(G, X')$ von p nach $q \in G$, der die Kante x' enthält. Da der Erzeuger x' redundant ist, kann die Kante $(g; x')$ durch einen Kantenweg mit Erzeugern in X ersetzt werden, z.B. durch $g\omega_0 = (g; x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_k \in X$. Der neue Kantenweg taucht aber maximal um $v_\chi(\omega_0) = \min\{0, \chi(x_1), \chi(x_1x_2), \dots, \chi(x_1 \dots x_n)\}$ unter den Wert r ab. Somit wählen wir ein $t \in X$ mit $\chi(t) > 0$ und ein genügend grosses m , so dass $\chi(t^m) = m\chi(t) > -v_\chi(\omega_0)$. Im isomorphen Graphen $t^m\Gamma_\chi^r$ kann jetzt die x' -Kante auf diese

Weise ersetzt werden, ohne dass darin der Zusammenhang verloren geht. Da $t^m \Gamma_\chi^r = \Gamma_\chi^{r+m\chi(t)}$ und wegen Lemma 2.2 bleibt der Zusammenhang aber auch in Γ_χ^r erhalten. \square

Wir sehen also, dass der Zusammenhang vom Cayley Untergraphen $\Gamma_\chi^r(G, X)$ weder von r noch von der gewählten Erzeugermenge X abhängt. Ohne Einschränkung können wir $r = 0$ wählen. Die Σ -Invariante ist nun folgendermassen definiert.

(Σ -Invariante)

$$\Sigma(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \Gamma_\chi^{r=0} \text{ ist zusammenhängend}\}. \quad (2.9)$$

$\Sigma(G)$ ist also die Teilmenge der Charaktersphäre $S(G)$, für welche der Untergraph $\Gamma_\chi(G, X)$ zusammenhängend ist. Σ ist unabhängig von der gewählten Erzeugermenge $X \subset G$, und somit ist es eine *Invariante* der Gruppe.

Beispiel 2.5. Kommen wir auf das vorhergehende Beispiel der Gruppe $G = (\mathbb{Z}^2, +)$ zurück. In Abb. 2.3 sehen wir leicht, dass Γ_χ^r für jede Wahl von χ zusammenhängend ist. Also ist in diesem Fall $\Sigma(G) = S(G)$.

Beispiel 2.6. Allgemein zeigt man, dass bei endlich erzeugten abelsche Gruppen Σ immer die volle Charaktersphäre abdeckt: Gemäss Klassifikationssatz 1.4 sind solche Gruppen isomorph zu $\mathbb{Z}^k \oplus (\text{endlich})$, wobei der endliche Teil hier keine Rolle spielt [da $\chi(\text{endlich}) = 0$]. Offensichtlich ist der Untergraph $\{v \in \mathbb{Z}^k \mid \chi_a(v) = a \cdot v \geq 0\}$ zusammenhängend für alle $a \in \mathbb{R}^k$. \square

Beispiel 2.7. Betrachten wir ein weiteres einfaches Beispiel: Die freie Gruppe $F_{k>1}$. Wie in Bsp. 1.9 besprochen, ist die Abelisierung $F_k/F_k' \cong \mathbb{Z}^k$. Der \mathbb{Z} -Rang ist somit k und die Charaktersphäre $S(F_k)$ hat Dimension $k - 1$. Der Cayley Graph $\Gamma(F_k)$ ist ein Baum und man sieht leicht, dass der Untergraph Γ_χ^r nicht zusammenhängend ist. Wählen wir dazu ein $r > 0$ und die Knoten $g_1 = x^n y^m$ und $g_2 = y^m x^n$, wobei x, y zwei verschiedene Elemente der Basis sind mit $\chi(x), \chi(y) > 0$. Offensichtlich ist $\chi(g_1) = \chi(g_2) = n\chi(x) + m\chi(y)$, und für genügend grosse n und m liegen beide Knoten in Γ_χ^r . Die Knoten g_1 und g_2 können beide jeweils durch genau einen reduzierten Kantenweg vom Neutralelement aus erreicht werden: $\omega_1 = (1; x, \dots, x, y, \dots, y)$ resp. $\omega_2 = (1; y, \dots, y, x, \dots, x)$. Also sind g_1 und g_2 nur durch den Kantenweg $\omega = \omega_1^{-1} \omega_2 = (g_1; y^{-1}, \dots, y^{-1}, x^{-1}, \dots, x^{-1}, y, \dots, y, x, \dots, x)$ verbindbar. ω ist schon reduziert und läuft via Neutralelement mit $\chi(1) < r$. Somit liegen g_1 und g_2 in nicht-zusammenhängenden Teilmengen von Γ_χ^r . Dies gilt für jedes χ , also ist $\Sigma(F_k) = \emptyset$. \square

Bemerkung. Es kann nützlich sein, den Homomorphismus $\pi : G \rightarrow G/G'$ geometrisch als Projektion des Cayley Graphen von G auf denjenigen von G/G' aufzufassen. Betrachten wir beispielsweise die Abelisierung $F_2 \rightarrow F_2/F_2' = \mathbb{Z}^2$. Der Cayley Graph der frei abelschen Gruppe \mathbb{Z}^2 ist in Abb. 2.3 gegeben. Der Cayley Graph von F_2 breitet sich als Baum in der dritten Dimension aus, wobei jeweils mehrere Knoten senkrecht über jedem Gitterpunkt von \mathbb{Z}^2 liegen (ausser über dem Ursprung) und darauf projiziert werden. Vom Ursprung ausgehende Kantenwege in \mathbb{Z}^2 können nun eindeutig auf Kantenwege in F_2 zurückgeführt werden. Dies nennt man eine *Überlagerung* von \mathbb{Z}^2 .

2.4 Σ -Kriterien

Wir geben nun einige äquivalente Kriterien an, welche besagen, dass der Graph Γ_χ^r zusammenhängend ist. Diese Kriterien helfen zu entscheiden, ob ein $[\chi] \in S(G)$ zur Menge Σ gehört. Ähnliche Diskussionen sind in [BS94; Str13] zu finden.

Sei $W(\Gamma)$ die Menge der Kantenwege im Cayley Graphen. Wir definieren folgende Erweiterung v_χ vom Charakter χ auf die Kantenwege:

$$\begin{aligned} v_\chi : W(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_\chi(\omega) &= \min\{\chi(g), \chi(gx_1), \dots, \chi(gx_1 \dots x_n)\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Es ist also der *kleinste Wert*, den χ auf den Knoten des Kantenwegs annimmt.

(Kantenweg-push) Weiter definieren wir den *Kantenweg-push*. Sei φ eine G -Abbildung, das heisst

$$\varphi : W(\Gamma) \rightarrow W(\Gamma) \quad (2.11)$$

mit $\varphi(g\omega) = g\varphi(\omega)$ und $\varphi(g) = g\varphi(1) \in G$, $\forall g \in G$ und $\omega \in W(\Gamma)$. Diese G -Abbildung ist ein *Kantenweg-push in Richtung $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$* , wenn

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ so dass } v_\chi(\varphi(\omega)) \geq v_\chi(\omega) + \varepsilon, \forall \omega \in W(\Gamma). \quad (2.12)$$

Anders ausgedrückt: Ein Kantenweg-push in Richtung χ vergrößert den Wert von v_χ auf allen Kantenwegen. Als Illustration ist ein Beispiel in Abb. 2.4 gegeben.

Es lassen sich nun folgende Kriterien für den Zusammenhang von Γ_χ^r formulieren.

Satz 2.4 (Σ -Kriterium). Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Γ_χ^r ist zusammenhängend.
- (ii) Es gibt ein $t \in G$ mit $\chi(t) > 0$ und für jedes $y \in Y = X \cup X^{-1}$ einen Kantenweg ω_y von t nach yt , so dass $v_\chi(\omega_y) > v_\chi(1; y)$.
- (iii) $\exists \varphi : W(\Gamma) \rightarrow W(\Gamma)$ ein Kantenweg-push in Richtung χ .

Bemerkung. In Kriterium (ii) ist zu unterstreichen, dass der Kantenweg ω_y von t nach yt führt, und nicht etwa von t nach ty [Sonst wäre es einfach die Kante $(t; y)$]. Siehe auch Illustration in Abb. 2.5. Bemerkenswert ist, dass die Σ -Kriterien *lokale* Bedingungen liefern für eine *globale* Eigenschaft, nämlich dem Zusammenhang von Γ_χ^r .

Beweis. [(i) \Rightarrow (ii)] Wir wählen zuerst ein beliebiges $t \in G$ mit $\chi(t) > 0$, und addieren dieses zum Erzeugersystem X . Dank Lemma 2.3 ändert dies den Zusammenhang von Γ_χ^r nicht. Dank Lemma 2.2 ist r beliebig, und wir wählen $r = \min\{\chi(t), \chi(yt)\} = \chi(t) + v_\chi(1; y) = v_\chi(t; y)$. Daraus folgt, dass sowohl t als auch yt in Γ_χ^r liegen, und wegen dem Zusammenhang gibt es darin einen Kantenweg ω_y , der diese Knoten verbindet. Also ist $v_\chi(\omega_y) \geq r = v_\chi(t; y) > v_\chi(1; y)$. \square

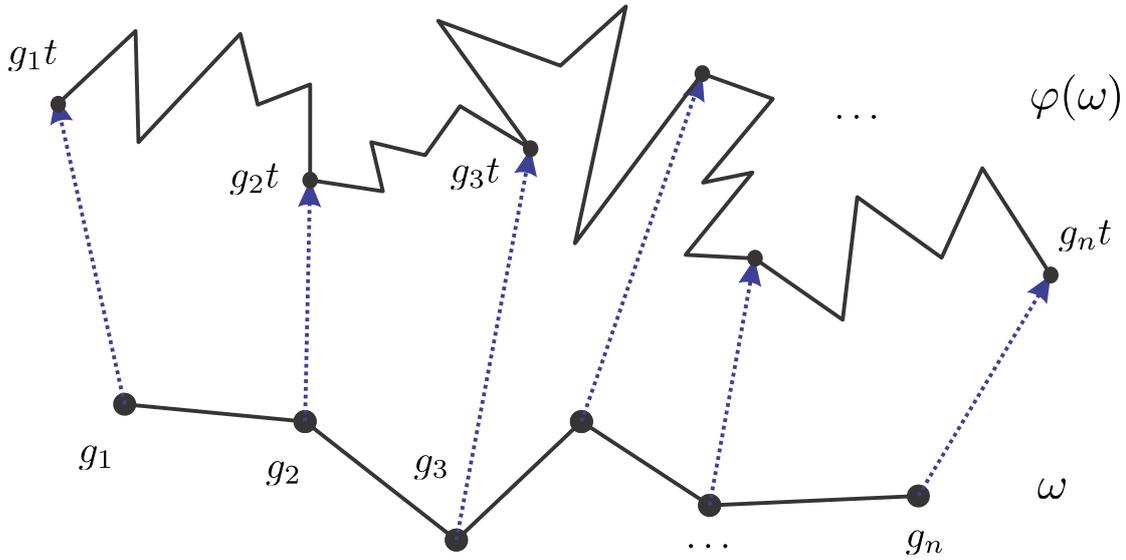


Abb. 2.4: Kantenweg-push $\omega \mapsto \varphi(\omega)$: Der Wert vom Minimum v_χ wird durch die Abbildung vergrössert. Iteriert man einen Kantenweg-push genügend oft [d.h. $\omega \mapsto \varphi^k(\omega)$], so vergrössert sich sogar h_χ auf dem ganzen Kantenweg [d.h. $\max(h_\chi(\omega)) < \min(h_\chi(\varphi^k(\omega)))$]. Die Anfangs- resp. Endpunkte der Kantenwege verlaufen dabei auf den Bahnen $g_1 t^k$ und $g_n t^k$.

[(ii) \Rightarrow (iii)] Als nächstes wollen wir mit Hilfe der Abbildung $y \mapsto \omega_y$ einen Kantenweg-push konstruieren. Sei $\omega = (g_1; y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ein Kantenweg von g_1 nach $g_n = g_1 y_1 \dots y_{n-1}$. Wir schreiben

$$\omega = g_1(1; y_1) g_2(1; y_2) \dots g_{n-1}(1; y_{n-1}). \quad (2.13)$$

Nun ersetzen wir alle Kanten $(1; y)$ in ω mit ω_y und erhalten so den Kantenweg

$$\omega' = g_1 \omega_{y_1} g_2 \omega_{y_2} \dots g_{n-1} \omega_{y_{n-1}}, \quad (2.14)$$

welcher von $g_1 t$ nach $g_n t$ führt (siehe Abb. 2.4). Wir haben

$$v_\chi(\omega) = \min\{\chi(g_1) + v_\chi(1; y_1), \chi(g_2) + v_\chi(1; y_2), \dots, \chi(g_{n-1}) + v_\chi(1; y_{n-1})\} \quad (2.15)$$

und

$$v_\chi(\omega') = \min\{\chi(g_1) + v_\chi(\omega_{y_1}), \chi(g_2) + v_\chi(\omega_{y_2}), \dots, \chi(g_{n-1}) + v_\chi(\omega_{y_{n-1}})\}. \quad (2.16)$$

Gemäss Annahme ist $v_\chi(\omega_y) > v_\chi(1; y)$, also ist $v_\chi(\omega') > v_\chi(\omega)$. Die Abbildung $\omega \mapsto \omega'$ ist somit ein Kantenweg-push in Richtung χ . \square

[(iii) \Rightarrow (i)] Schliesslich zeigen wir, dass der Zusammenhang von Γ_χ^r aus der Existenz eines Kantenweg-push φ folgt. Wählen wir $r = 0$ und zwei Knoten g_1 und g_2 in Γ_χ^r , d.h. $\chi(g_1), \chi(g_2) > 0$. Ein Kantenweg ω von g_1 nach g_2 taucht im Allgemeinen in negative

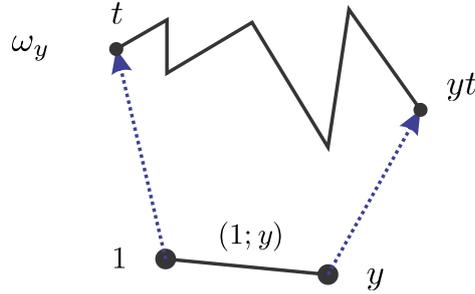


Abb. 2.5: $(1; y) \mapsto \omega_y$ aus Kriterium (ii) in Satz 2.4: Die Bedingung ist, dass der Wert der Charakter dabei erhöht wird: $v_\chi(\omega_y) > v_\chi(1; y) = \min\{0, \chi(y)\}$. Dies muss für alle Erzeuger $y \in X \cup X^{-1}$ gelten.

Bereiche von χ ab [d.h. $v_\chi(\omega) < 0$]. Den Wert von v_χ können wir aber durch Anwendung des Kantenweg-push erhöhen. Der Kantenweg $\omega^{(1)} = (g_1; t) \varphi(\omega) (g_2 t; t^{-1})$ startet dann auch wieder bei g_1 und endet bei g_2 [Hier ist $t = \varphi(1)$ mit $\chi(t) > 0$. Bei Bedarf müssen wir t zur Erzeugermenge hinzufügen]. Wir zeigen nun, dass sich durch Iteration der Wert von v_χ beliebig erhöhen lässt. Sei

$$\omega^{(k)} = (g_1; t, t, \dots, t) \varphi^k(\omega) (g_n t^k; t^{-1}, t^{-1}, \dots, t^{-1}). \quad (2.17)$$

Wir haben

$$v_\chi(\omega^{(k)}) = \min\{v_\chi(g_1; t, \dots, t), v_\chi(\varphi^k(\omega)), v_\chi(g_n t^k; t^{-1}, \dots, t^{-1})\}. \quad (2.18)$$

Wegen $\chi(t) > 0$ ist $v_\chi(g_1; t, \dots, t) = \chi(g_1)$ und $v_\chi(g_n t^k; t^{-1}, \dots, t^{-1}) = \chi(g_n)$. Weiter folgt aus der Annahme, dass $v_\chi(\varphi^k(\omega)) \geq v_\chi(\omega) + k\varepsilon$. Somit finden wir

$$v_\chi(\omega^{(k)}) \geq v_\chi(\omega) + k\varepsilon. \quad (2.19)$$

Für genügend grosse Anzahl Iterationen k rückt der Kantenweg $\omega^{(k)}$ in den positiven Bereich von χ . Somit sind beliebige Knoten in Γ_χ^r verbindbar und dieser Graph ist zusammenhängend. \square

Korollar 2.5 (Offenheit von Σ). Wenn für ein χ der Untergraph Γ_χ^r zusammenhängend ist, dann ist er es auch für χ' hinreichend nahe bei χ .

Beweis. Die Offenheit vom $\Sigma \subset S(G)$ folgt aus den Σ -Kriterien. Nehmen wir zum Beispiel Kriterium (ii). $v_{\chi'}(\omega) - v_\chi(\omega) = \delta_\omega$ kann im Betrag beliebig klein gemacht werden, wenn $|\chi - \chi'| \ll 1$. Also ist $v_{\chi'}(\omega_y) - v_{\chi'}(1; y) = v_\chi(\omega_y) - v_\chi(1; y) + \delta \geq \varepsilon + \delta$. Für $|\delta| < \varepsilon$ haben wir $\varepsilon + \delta > 0$ und das Kriterium ist somit auch für χ' erfüllt. \square

Beispiel 2.8. Als einfaches Beispiel betrachten wir wieder die freie Gruppe $F_{k>1}$. Sei die Basis $X = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Wir möchten das Kriterium (ii) aus Satz 2.4 benutzen, d.h. Kantenwege ω_y für die Kanten $y = (1; b_n)$ und ihrer Inversen suchen. Sei eine G -Abbildung von $(1; b_n)$ auf einen Weg $\omega_n = \omega(t \rightarrow b_n t)$. Da Γ ein Baum ist, und da t

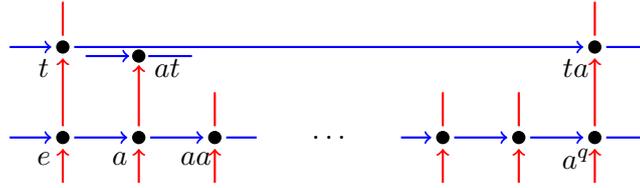


Abb. 2.6: Teil des Cayley Graphen der Gruppe G_q , Gl. (2.20).

und $b_n t$ auf unterschiedlichen Seiten der Kante $(1; b_n)$ liegen, muss ω_n notwendigerweise über die Kante $(1; b_n)$ führen. Ein solcher Weg kann aber den Wert von $v_\chi(1; b_n)$ nicht übersteigen, und somit erfüllt er das Kriterium nicht. Gemäss Satz 2.4 ist Γ_χ also nicht zusammenhängend und Σ ist leer.

Beispiel 2.9. Betrachten wir nun eine etwas kompliziertere Gruppe. Sei

$$G_q = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right] \rtimes \text{gp}(t), \tag{2.20}$$

mit $q \in \mathbb{N}$ und

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right] = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \mid q^k \right\}, \tag{2.21}$$

wobei „ $b \mid q^k$ “ bedeutet, dass b Teiler einer beliebigen Potenz von q ist. $\mathbb{Z}[1/q]$ ist eine additive Gruppe und wir schreiben das neutrale Element als „0“. Die von t erzeugte Gruppe agiert darauf als Multiplikation mit q : Sei $x \in \mathbb{Z}[1/q]$, so gilt $txt^{-1} = qx$. Allgemein ist für $(x, t^n) \in G_q$ die Verknüpfung

$$(x, t^n) \cdot (y, t^m) = (x + q^n y, t^{n+m}). \tag{2.22}$$

Man prüft einfach, dass das inverse Element gegeben ist durch

$$(x, t^n)^{-1} = \left(-\frac{x}{q^n}, t^{-n}\right). \tag{2.23}$$

Wir sehen, dass für $q = 1$ die Gruppe (2.20) ein direktes Produkt ist. Diesen trivialen Fall schliessen wir in der Folge aus.

Die Gruppe G_q wird durch zwei Elemente erzeugt:

$$G_q = \text{gp}(\{(1, t^0), (0, t)\}). \tag{2.24}$$

Der resultierende Cayley Graph hat eine interessante Struktur. Ein Teil davon ist in Abb. 2.6 gezeigt. Das neutrale Element der Gruppe wird hier als $e = (0, 1)$ bezeichnet und die Erzeuger als $a = (1, t^0)$ und $t = (0, t)$.

Die Erzeuger $\{a, t\}$ erfüllen die Gleichung $ta = a^q t$.[‡] Für mögliche Charakter χ folgt daraus $\chi(t) + \chi(a) = q\chi(a) + \chi(t)$, also muss $\chi(a) = 0$ sein für $q > 1$. Somit ist nur $\chi(t)$

[‡] G_q gehört somit zur Familie der sog. *Baumslag-Solitar* Gruppen.

frei wählbar, also ist $\text{Hom}(G_q, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Der freie Rang der Abelsonisierung G_q/G'_q ist also 1 und die Charaktersphäre $S(G_q) = \{+1, -1\}$. Der Cayley Graph ist selbstähnlich mit repetierenden Zyklen. Das heisst, aus jedem Knoten in Abb. 2.6 entspringt wieder ein ähnlicher Zyklus.

Besprechen wir nun den Zusammenhang von Γ_χ^r für diese Gruppe. Wir schreiben $\chi(t) = \chi_t = \pm 1$ und wollen wieder Kriterium (ii) aus Satz 2.4 anwenden. Wir nennen das Element t im Kriterium \tilde{t} , um es nicht mit dem Erzeuger in diesem Beispiel zu verwechseln. Die Erzeuger sind $Y = \{a, t, a^{-1}, t^{-1}\}$.

Betrachten wir zuerst den Fall $\chi_t = 1$; hier können wir $\tilde{t} = t$ wählen. Suchen wir nun für die Kante $(1; a)$ einen Kantenweg von t nach at . Eine natürliche Wahl ist $\omega_a = (t; a, t^{-1}, a^{-1}, \dots, a^{-1}, t)$, und wir finden leicht $v_\chi(\omega_a) = 0$. Wir haben aber $v_\chi(a) = 0$, also ist das Kriterium nicht erfüllt. Wir zeigen, dass es einen solchen Kantenweg von t nach at mit $v_\chi(\omega) > 0$ nicht geben kann: Um die Knoten t und at auf der Stufe $\chi = 1$ zu verbinden, muss es ein $k \in \mathbb{Z}$ geben, so dass $ta^k = at$. a^k können wir mit t kommutieren, und wir erhalten die Gleichung $a^{qk}t = at$, oder $a^{qk} = a$. Diese Gleichung hat offensichtlich keine Lösung (da $q > 1$). Höhere Stufen ($\chi > 1$) erhalten wir durch Multiplizieren mit t , und die Argumentation bleibt gleich.

Betrachten wir nun den Fall $\chi_t = -1$. Hier wählen wir $\tilde{t} = t^{-1}$; die blauen Kanten in Abb. 2.6 ändern ihre Richtung. Als erstes finden wir einen Kantenweg ω_a von \tilde{t} nach $a\tilde{t}$. Wir wählen den natürlichen Kantenweg $\omega_a = (\tilde{t}; a, \dots, a)$ und finden $v_\chi(\omega_a) = \chi(\tilde{t}) = 1 > v_\chi(1; a) = 0$. Somit ist Kriterium (ii) erfüllt.

Weiter müssen wir das Kriterium für a^{-1} , sowie für den Erzeuger t prüfen. Für $\omega_{a^{-1}}$ ersetzen wir einfach die Kanten in ω_a mit a^{-1} . Das Kriterium ist für $t = \tilde{t}$ und $t^{-1} = \tilde{t}$ immer erfüllt, da die elementaren Kanten $(\tilde{t}; t)$ und $(\tilde{t}; t^{-1})$ die gesuchten Kantenwege sind: $v_\chi(\tilde{t}; t) = 1 > v_\chi(1; t) = 0$ und $v_\chi(\tilde{t}; t^{-1}) = 0 > v_\chi(1; t^{-1}) = -1$.

Wir sehen also in diesem Beispiel, dass die Charaktersphäre $S(G_q) = \{-1, 1\}$ von der Σ -Invarianten gerade halbiert wird: $\Sigma(G_q) = \{-1\}$.

2.5 Anwendungen

Mit Hilfe der BNS Theorie und der Σ -Invarianten liessen sich erstmals verschiedene, sehr allgemeine Aussagen über unendliche Gruppen beweisen, welche vorher bestenfalls vermutet wurden. In diesem letzten Kapitel besprechen wir einige dieser wichtigen Anwendungen der BNS Theorie. Wir formulieren sie als Theoreme, welche hier aber nicht bewiesen werden. In [BS80; BNS87; BS94; Str13] kann man mehr dazu finden.

Die Theoreme 2.6 – 2.9 unten betreffen algebraische Gruppeneigenschaften, welche in geometrische Eigenschaften der Σ -Invarianten übersetzt werden können. Damit gelang es beispielsweise, mehr Klarheit in den schwierigen Begriff der *endlichen Präsentierbarkeit* von Gruppen zu bringen (mehr dazu weiter unten). Das Korollar 2.10 macht dann eine allgemeine und interessante Aussage über Gruppen, die zwar ohne Σ -Invarianten formuliert werden kann, deren Beweis aber erst durch die BNS Theorie ermöglicht wurde. Die Korollare 2.11 und 2.12 schlussendlich beantworten eine ältere,

allgemeine Frage von Philip Hall zur endlichen Präsentierbarkeit, im Fall von metabelschen Gruppen. Zum Schluss skizzieren wir ein Beispiel von Herbert Abels zu nicht-metabelschen Gruppen.

Wie überall in dieser Arbeit nehmen wir auch hier an, dass die Gruppe G endlich erzeugt ist. Für solche Gruppen gilt folgendes

Theorem 2.6. G' ist endlich erzeugt genau dann, wenn $\Sigma(G) = S(G)$.

Bemerkung. Auch wenn G endlich erzeugt ist, so ist die Kommutatorgruppe G' nicht unbedingt endlich erzeugt. Ein einfaches Beispiel ist die freie Gruppe F_k (siehe Bsp. 1.9): F'_k ist offensichtlich nicht endlich erzeugt (für $k > 1$). In Bsp. 2.6 habe wir gezeigt, dass bei abelschen Gruppen Σ die volle Charaktersphäre abdeckt. Dies ist ein Spezialfall von Theorem 2.6, da die Kommutatorgruppe abelscher Gruppen trivial und somit endlich erzeugt ist.

Mit Hilfe eines Normalteilers $N \trianglelefteq G$ kann man eine weitere Untermenge der Charaktersphäre definieren:

$$S(G, N) := \{[\chi] \in S(G) \mid \chi(N) = 0\} \subset S(G). \quad (2.25)$$

Für diese Untermenge gilt

Theorem 2.7. $N \trianglelefteq G$ ist endlich erzeugt genau dann, wenn $S(G, N) \subseteq \Sigma(G)$.

(Präsentierung) Ein wichtiges Konzept in der Gruppentheorie, welches wir bis anhin nicht besprochen haben, ist die *Präsentierung* einer Gruppe. Als Alternative zur Gruppentafel oder zum Cayley Graphen (siehe Kap. 2.1) kann eine Gruppenstruktur durch eine Erzeugermenge X und einer Menge von definierenden Relationen festgelegt werden: Ein Element g der Gruppe G hat im Allgemeinen mehrere Darstellungen als Produkt in $Y = X \cup X^{-1}$. Es gibt dann zwei verschiedenen Wörter u und v im Alphabet Y , welche ausmultipliziert g ergeben. In so einem Fall sagt man „in G gilt $u = v$ “, und die Gleichung $u = v$ ist eine *Relation von $(G; X)$* . Aufgrund der Gruppenaxiome stehen natürlich immer „triviale Relationen“ zur Verfügung, wie $(uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}$ oder $u^{-1}u = 1$ etc. *Definierende Relationen* wird eine Menge R von Relationen genannt, aus denen man mit Hilfe der Gruppenaxiome alle Relationen von $(G; X)$ herleiten kann. Dieser Sachverhalt wird so geschrieben: $G = \langle X \mid R \rangle$. Beispielsweise schreiben wir $\mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ für zyklische Gruppen.

Eine Gruppe heisst *endlich präsentiert*, wenn eine endliche Anzahl definierender Relationen R von $(G; X)$ gegeben ist. Interessanterweise ist die Eigenschaft, eine endliche Präsentation zu besitzen, nicht von der Wahl der Erzeugermenge abhängig. Vielmehr ist es eine Eigenschaft der endlich erzeugten Gruppe G selber. Man kann also von einer endlich präsentierten Gruppe sprechen, ohne eine Erzeugermenge zu nennen. Zum Beispiel sind endlich erzeugte abelsche Gruppen $[R = \{x_i x_j = x_j x_i\}_{i < j}]$ oder freie Gruppen $[R = \emptyset]$ endlich präsentiert.

Ein anderer Zugang zur Präsentation als oben beschrieben, verwendet die freie Gruppe $F_{|X|}$ über der Basis X , und bildet dann die Gruppe G als Faktorgruppe: $G \cong$

$F_{|X|}/R$. Ohne auf diesen Zugang näher einzugehen, weisen wir hier auf Satz 1.3 und seinen Beweis in Kapitel 1.4 hin. Dort legt der Kern des Homomorphismus \bar{f} mögliche Relationen $r_k = 1$ der Präsentierung fest.

Da es nur abzählbar viele Möglichkeiten gibt, endlich viele Relationen zu benennen, gibt es nur abzählbar viele endlich präsentierte Gruppen. Aus diesem Grund sind endlich präsentierte Gruppen ziemlich speziell, denn allgemein kann man zeigen, dass es nur schon für zwei Erzeuger überabzählbar viele (Isomorphieklassen von) Gruppen gibt. Welche strukturellen Einschränkungen die endliche Präsentierbarkeit mit sich bringt, ist aber bis heute weitgehend unbekannt und unerforscht.

(Metabelsche Gruppen) Eine *metabelsche Gruppe* ist eine Gruppe G , dessen Kommutatorgruppe G' abelsch ist. Für solche Gruppen gilt folgendes

Theorem 2.8. Eine Gruppe G ist endlich präsentiert und metabelsch genau dann, wenn $S(G) = \Sigma(G) \cup [-\Sigma(G)]$.

Bemerkung 1. Die Schreibweise $[-\Sigma(G)]$ bezeichnet die Antipoden auf der Charaktersphäre, d.h. die Menge der Strahlen $[\chi] \in S(G)$ mit $\Gamma_{-\chi}^r$ zusammenhängend. Die Bedingung $S(G) = \Sigma(G) \cup [-\Sigma(G)]$ in Theorem 2.8 besagt also, dass zumindest Γ_{χ}^r oder $\Gamma_{-\chi}^r$ für jedes $\chi \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$ zusammenhängend ist.

Bemerkung 2. Zu Theorem 2.8 kann man anmerken, dass damit die Frage „Was bedeutet endliche Präsentiertheit wirklich?“ zumindest für metabelsche Gruppen einigermaßen beantwortet wird.

Theorem 2.9. Sei G eine Gruppe, die keine zu F_2 isomorphe Untergruppe enthält.[§] Dann gilt: Wenn G endlich präsentiert ist, dann ist $S(G) = \Sigma(G) \cup [-\Sigma(G)]$.

Aus diesen Theoremen folgen nun einige Korollare, welche interessanterweise sehr allgemeine Aussagen über endlich erzeugte Gruppen machen.

Korollar 2.10. Sei G eine Gruppe, die keine zu F_2 isomorphe Untergruppe enthält. Dann gilt: Wenn G endlich präsentiert und der freie Rang der Abelisierung $G/G' > 1$ ist, dann enthält G einen endlich erzeugten Normalteiler N mit unendlich-zyklischer Faktorgruppe G/N .

Beweisskizze von Korollar 2.10. Da der freie Rang von G/G' , n , grösser als 1 ist, haben wir $\dim[\text{Hom}(G/G', \mathbb{R})] = n > 1$. Also ist $S(G)$ eine Sphäre der Dimension ≥ 1 und somit zusammenhängend. Wegen Theorem 2.9 überdeckt $\Sigma(G) \cup [-\Sigma(G)]$ die Sphäre vollständig. Die beiden Mengen sind offen (Korollar 2.5). Da $S(G)$ zusammenhängend ist, kann die Charaktersphäre nicht als Vereinigung von zwei offenen disjunkten Teilmengen geschrieben werden. Also ist der Durchschnitt $\Sigma(G) \cap [-\Sigma(G)]$ eine nicht-leere, offene Teilmenge der Sphäre $S(G)$. Da das Bild von $\text{Hom}(G/G', \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ unter der radialen Projektion auf $S(G)$ [¶] in $S(G)$ dicht ist, muss diese offene nicht-leere Teilmenge von $S(G)$ einen solchen Bildpunkt enthalten. Das bedeutet, dass es einen surjektiven

[§] F_2 ist die freie Gruppe vom Rang 2; siehe Kapitel 1.2.

[¶]Hier wird $S(G)$ als Einheitssphäre in $\text{Hom}(G/G', \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ aufgefasst.

Homomorphismus $G/G' \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ zusammengesetzt mit $G \twoheadrightarrow G/G'$, also einen Homomorphismus $\chi : G \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, gibt, mit der Eigenschaft, dass sowohl $[\chi]$ also auch $[-\chi]$ in $\Sigma(G)$ sind. Das kann man so interpretieren, dass die Invariante der zyklischen Faktorgruppe, $\Sigma(\mathbb{Z})$, sowohl $[\chi]$ als auch $[-\chi]$ enthält. Das ist aber schon die ganze Sphäre $S(\mathbb{Z})$. Wendet man nun Theorem 2.7 auf $G = \mathbb{Z}$ an, so erhält man, dass $N = \ker(\chi)$ endlich erzeugt ist. \square

Um Korollar 2.10 als Anwendung einschätzen zu können, muss man folgendes wissen: Ist N ein Normalteiler einer endlich erzeugten Gruppe G , mit unendlicher Faktorgruppe G/N , dann ist N als Gruppe im Allgemeinen nicht endlich erzeugt. Man sieht dies z.B. in Beispiel 2.9, wo $G_q/\mathbb{Z}[1/q] \cong \mathbb{Z}$ und die Gruppe $\mathbb{Z}[1/q]$ ist nicht endlich erzeugt. Das Korollar zeigt also, dass gewisse Gruppen, wenn sie endlich präsentiert sind und der \mathbb{Z} -Rang der Abelisierung grösser als 1 ist, immer endlich erzeugte Untergruppen mit Faktorgruppe \mathbb{Z} haben.

Korollar 2.11. Wenn eine endlich präsentierte Gruppe G keine freie Untergruppe vom Rang 2 enthält, dann ist jede metabelsche Faktorgruppe G/N endlich präsentiert.

Beweisskizze von Korollar 2.11. Wenn man vom Cayley Graph von G übergeht zum Cayley Graphen der Faktorgruppe G/N , so muss man lediglich viele Knoten identifizieren: Alle Elemente von gN werden mit g identifiziert. Dadurch wird die Möglichkeit, dass zwei Elemente verbunden werden können, nur vergrössert. Es gilt also auf alle Fälle, und ohne jede Voraussetzung an die Gruppe, dass $\Sigma(G) \subset \Sigma(G/N)$. Wenn also die Bedingung $\Sigma(G) \cup [-\Sigma(G)] = S(G)$ gilt, dann gilt dasselbe erst recht für G/N . Korollar 2.11 folgt dann aus dem Zusammenspiel der Theoreme 2.8 und 2.9. \square

(Auflösbare Gruppe) Sei G eine Gruppe. Die Bildung der Kommutatorgruppe kann iteriert werden: Wir definieren $G^{(0)} = G$, $G^{(1)} = G'$, und $G^{(n)} = [G^{(n-1)}]'$ für $n \in \mathbb{N}$. Eine Gruppe G heisst *auflösbar*, wenn es eine natürliche Zahl d gibt (Index) mit $G^{(d)} = 1$ (triviale Gruppe).

Beispiel 2.10. $G' = 1$ bedeutet „ G abelsch“: Abelsche Gruppen sind also auflösbar mit Index 1. $G^{(2)} = 1$ bedeutet „ G metabelsch“: Metabelsche Gruppen sind also auflösbar mit Index 2.

Beispiel 2.11. Jede Gruppe der Dreiecksmatrizen enthält eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index d .

Interessant war 1980, dass das Korollar 2.11 ein 25 Jahre altes Problem ansprach: 1954 fragte Philip Hall [Hal54], ob alle Faktorgruppen G/N einer endlich präsentierten auflösbaren Gruppe G wieder endlich präsentiert sind. Diese Frage wurde durch das Korollar für metabelsche Faktorgruppen gelöst: Da auflösbare Gruppen F_2 nicht als Untergruppe enthalten können, folgt

Korollar 2.12. Wenn G eine endlich präsentierte auflösbare Gruppe ist, dann ist jede metabelsche Faktorgruppe G/N auch endlich präsentiert.

Bei der Entwicklung der BNS Theorie war die Allgemeinheit der Aussagen in den Korollaren 2.10 – 2.12 überraschend. Das heisst, die Korollare betreffen nicht spezielle Beispiele von konkreten Gruppen (über die man manchmal viel mehr weiss), sondern sie haben ein allgemeinere Gültigkeit.

Beispiel 2.12. Interessanterweise fand Herbert Abels [Abe79] etwa gleichzeitig ein negatives Beispiel zur allgemeinen Frage von P. Hall: Die Gruppe G_p der oberen Dreiecksmatrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & p^n & * & * \\ 0 & 0 & p^m & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei p eine Primzahl ist, „*“ Elemente in $\mathbb{Z}[1/p]$ und n, m ganze Zahlen sind (siehe auch Bsp. 2.9). Die Gruppenverknüpfung ist die Matrixmultiplikation, und G_p ist endlich erzeugt. Wie alle Dreiecksmatrizen Gruppen ist G_p auflösbar. Man kann sogar zeigen, dass schon $G_p^{(3)} = 1$.

Die Matrizen der Form

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

bilden eine Untergruppe von G_p , welche isomorph zur additiven Gruppe $Z = \mathbb{Z}[1/p]$ ist. Solche Matrizen kommutieren mit G_p , sie bilden also ein *Zentrum*, und Z ist auch ein Normalteiler von G_p . Man kann zeigen, dass G_p/Z nicht endlich präsentiert ist (ohne Beweis).

G_p ist also endlich präsentiert und auflösbar, aber die Faktorgruppe G_p/Z ist nicht endlich präsentiert. Aus Korollar 2.12 folgt dann, dass G_p/Z nicht metabelsch sein kann. Dieses Beispiel zeigt, dass die Frage von P. Hall im Allgemeinen negativ beantwortet werden muss. Die Voraussetzung „ G/N metabelsch“ ist unerlässlich, falls die Faktorgruppe endlich präsentiert sein soll.

Literatur

- [BS80] Robert Bieri und Ralph Strebel. „Valuations and Finitely Presented Metabelian Groups“. In: *Proc. London Math. Soc.* s3-41 (1980), S. 439. URL: <https://doi.org/10.1112/plms/s3-41.3.439>.
- [BNS87] Robert Bieri, Walter D. Neumann und Ralph Strebel. „A geometric invariant of discrete groups“. In: *R. Invent. Math* 90 (1987), S. 451. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01389175>.
- [BR88] Robert Bieri und Burkhardt Renz. „Valuations of free resolutions and higher geometric invariants of groups“. In: *Comment. Math. Helvetici* 63 (1988), S. 464. URL: <https://doi.org/10.5169/seals-48216>.
- [BG84] Robert Bieri und J. R. J. Groves. „The geometry of the set of characters induced by valuations“. In: *J. Reine Angew. Math. (Crelle)* 347 (1984), S. 168. URL: <https://doi.org/10.1515/crll.1984.347.168>.
- [MS15] Diane Maclagan und Bernd Sturmfels. *Introduction to Tropical Geometry*. Bd. 161. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [Ren88] Burkhardt Renz. „Geometrische Invarianten und Endlichkeitseigenschaften von Gruppen“. In: *Dissertation* (1988). URL: <https://homepages.thm.de/~hg11260/mat/diss.pdf>.
- [Str13] Ralph Strebel. „Notes on the Sigma invariants“. In: *arXiv:1204.0214* (2013). URL: <https://arxiv.org/abs/1204.0214>.
- [BS94] Robert Bieri und Ralph Strebel. „Geometric Invariants for Discrete Groups“. In: *Unpublished monograph* (1994). URL: https://faculty.math.illinois.edu/~gfrancis/illimath/DPGraph.app/Contents/Resources/dosdevices/z\%3A/home/9/dowdall/math/literature/Bieri-Strebel--Geometric_Invariants_for_Discrete_Groups--preliminary.pdf.
- [Hal54] Philip Hall. „Finiteness Conditions for Soluble Groups“. In: *Proc. London Math. Soc.* s3-4 (1954), S. 419. URL: <http://doi.org/10.1112/plms/s3-4.1.419>.
- [Abe79] Herbert Abels. „An example of a finitely presented solvable group“. In: *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 36 (1979), S. 205–211.